

Thm 7.15* (sans items (h), (i)) Par $A \in M_n(\mathbb{R})$, les cond. suivantes sont équivalentes

- (a) A est inversible;
- (b) A est un produit (fini) de matrices élémentaires;
- (c) la FER de A est I_n ;
- (d) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le SEL $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ est compatible déterminé;
- (e) le SEL $A \cdot \vec{x} = 0$ n'a pas de solution non triviale;
- (f) les colonnes de A forment un ensemble libre;
- (g) les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.

(Preuve) Voir les notes. $\square$

↓ Dans cette séance on va voir:

- (i) Une simplification dans la définition d'inversibilité;
- (ii) un rappel de la définition de déterminant 2×2 ;
- (iii) la définition générale du déterminant $n \times n \rightarrow$ calcul récursif ?
- (iv) quelques propriétés du déterminant (transposition, OEL, ...)

(08.10.2024)

Corollaire du Thm 7.15* (Proposition 7) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \text{ inversible} \iff \exists B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } B.A = I_n$$
$$\iff \exists C \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A.C = I_n$$

(Preuve) $\Leftarrow$ de la 1ère ligne On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B.A = I_n$.

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $A.\bar{x} = 0$. On veut montrer que $\bar{x} = 0$. Pour le faire, on considère

$$\bar{x} = I_n.\bar{x} = \underbrace{B.A}_{=I_n}.\bar{x} = B.0 = 0 \implies A \text{ inversible}$$

item (c) $\iff$ item (a)
du Thm 7.15*

□

(pour le reste de la preuve, voir les notes)

Chapitre 9 Déterminants

le Chap. 8 sera vu plus tard

§ 9.1. Rappel du déterminant 2×2

On rappelle que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \stackrel{\substack{\text{on} \\ \text{écrit} \\ \text{aussi}}}{=} \det \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$$

Propriétés (Proposition 8)

$$(MUL) \quad \det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b}) \quad \& \quad \det(\bar{a}, \bar{b} + \lambda \bar{b}') = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}, \bar{b}')$$

$\uparrow$ multilinéarité

$$(ALT) \det(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \quad \leftarrow \text{alternance}$$

$$(NoR) \det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1 \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

pour tous $\bar{a}, \bar{a}', \bar{b}, \bar{b}' \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(Preuve) (ALT) \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2}(MUL) \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} a_1 + \lambda a'_1 \\ a_2 + \lambda a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = (a_1 + \lambda a'_1) b_2 - (a_2 + \lambda a'_2) b_1$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \lambda (a'_1 b_2 - a'_2 b_1) = \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) + \lambda \det \left(\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \quad \square$$

§ 9.2. Définition générale de déterminant

Déf. 9.2 Une application $\varphi: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ^{n facteurs} $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ avec $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$ est dite

(MUL) multilinéaire si pour tout $i \in [1, n]$ et tous vecteurs $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$ fixes, l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{a}_i \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n)$ est linéaire

(ALT) alternée si $\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$ dès que deux vecteurs $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$ coïncident pour $i \neq j$.

(NoR) normalisée si $\varphi(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = 1$ où $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Exercice (Ex. 9.3) φ satisfait (MUL) + (ALT) $\Rightarrow \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \bar{a}_n) = - \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \bar{a}_n)$ ^{transposition de $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$} $\square$

(antisymétrie de φ)

Def 9.4 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $i \in [1, m]$, $j \in [1, n]$, on définit la sous-matrice principale $A[i|j] \in M_{(m-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ comme la matrice obtenue de A en éliminant la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Exemple 9.5* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A[2|3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Thm 9.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$, il existe une unique application multilinéaire et alternée $\underline{\Phi}_{n,c} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ facteurs}} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\underline{\Phi}_{n,c}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = c$.

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \underline{\Phi}_{n,c}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

Pour $c=1$, on écrit "det" au lieu de $\underline{\Phi}_{n,1}$.

Pour $n=2$, $\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

En plus, si $n > 2$, $\underline{\Phi}_{n,1}$ peut être calculée à partir de $\underline{\Phi}_{n-1,1}$ par

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A[i|k])$$

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{j+l} a_{lj} \det(A[l|j])$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• développement selon l' i -ème ligne :

• développement selon la j -ème colonne :

(Preuve) O mise $\square$

Exemple 9.7

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

A

déu. selon
l'èreligne

$$= +1 \cdot \det(A[1|1]) - 2 \cdot \det(A[1|2]) + (-3) \cdot \det(A[1|3])$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 78 - 3 \cdot 67 = -360$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

□

§ 9.3. Propriétés

Déf 9.8. Si $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \in M_n(\mathbb{R})$, on écrit $\det(A)$ ou $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

Lemme 13 $\det(A^T) = \det(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

Déf. 9.12 On dit qu'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$. Elle est diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

Lemme 14 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, alors

$$\det(A) = a_{1,1} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

(Preuve des lemmes dans les notes)

Proposition 9

(O.E.C. I) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$

transposition de $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$

(O.E.C. II) $\det(\bar{a}_1, \dots, \lambda \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) = \lambda \cdot \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

(O.E.C. III) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$ par $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$

} par (MUL) + (ALT)!

} par (MUL) + (ALT)!

(preuve = exercice)